線形代数学 I/基礎 練習問題 8

講義担当者: 中村　知繁

基礎演習問題

基礎問題 1：用語と行列表現

次の連立一次方程式について、(1)〜(4) の問いに答えなさい。

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

1. この連立一次方程式の係数行列 A を書きなさい。
2. 未知数ベクトル $\mathbf{x}$ を書きなさい。
3. 定数ベクトル $\mathbf{b}$ を書きなさい。
4. この連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、方程式の数と未知数の数から見て、一般にどのような解の傾向（唯一解、無数の解、解なしのどれになりやすいか）を持つ系に分類されますか？その分類名も答えなさい。

基礎問題 2：解の種類

連立一次方程式の解の種類には、「唯一解」、「無数の解」、「解なし」の 3 つがあります。それぞれの解の種類がどのような状態を指すのか、簡潔に説明しなさい。

基礎問題 3：ランクと解の存在

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解の存在に関するルーシェ＝カペリの定理について、次の問いに答えなさい。

1. 解が存在するための必要十分条件を、係数行列 A のランク $\mathrm{rank}(A)$ と拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}]$ のランク $\mathrm{rank}([A|\mathbf{b}])$ を用いて述べなさい。
2. 解が存在し、かつその解が唯一であるための条件を、$\mathrm{rank}(A)$、$\mathrm{rank}([A|\mathbf{b}])$、および未知数の数 n を用いて述べなさい。
3. 解が存在し、かつその解が無数にあるための条件を、$\mathrm{rank}(A)$、$\mathrm{rank}([A|\mathbf{b}])$、および未知数の数 n を用いて述べなさい。

基礎問題 4：簡単な連立一次方程式の解法

次の連立一次方程式を解き、解の種類（唯一解、無数の解、解なし）を判定しなさい。

(a)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

基礎問題 5：解の幾何学的解釈（2 次元）

2 つの未知数 x, y に関する連立一次方程式は、各方程式が 2 次元平面上の直線を表します。このとき、次の 3 つの解の状態が、2 直線の幾何学的な関係としてどのように解釈できるか説明しなさい。

1. 唯一解が存在する。
2. 無数の解が存在する。
3. 解が存在しない。

応用演習問題

応用問題 1：連立一次方程式の解法と解の分類

次の連立一次方程式について、拡大係数行列にガウスの消去法を適用して簡約階段行列に変形し、解が存在するかどうかを判定しなさい。解が存在する場合は、その解を求め、解の種類（唯一解、無数の解、解なし）を明確に答えなさい。

(a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

応用問題 2：ランクと解の存在条件

ある連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について考えます。係数行列 A は $m \times n$ 行列です。

(a) $m = 3, n = 4$ で、$\text{rank}(A) = 3$ かつ $\text{rank}([A|\mathbf{b}]) = 3$ である場合、この連立一次方程式の解はどのようになりますか？解が存在する場合、自由変数の数はいくつになりますか？理由とともに説明しなさい。

(b) 連立一次方程式が「解なし」となるための、係数行列 A のランクと拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}]$ のランクに関する条件を述べなさい。また、この状況は幾何学的にどのような状態に対応すると考えられるか、2 次元または 3 次元の場合を例に説明しなさい（例：2 直線が平行で交わらない、3 平面が共通点を持たないなど）。

応用問題 3：解の性質と行列の特性

n 個の未知数を持つ n 個の一次方程式からなる連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (すなわち、A は $n \times n$ の正方行列) を考えます。

(a) この方程式が唯一解を持つための、係数行列 A に関する条件を 3 つ挙げなさい (例: A のランク、逆行列の存在、行列式の値など)。

(b) もし、この方程式が $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (同次連立一次方程式) の場合に自明でない解 (すなわち $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となる解) を持つならば、$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ の場合にこの方程式の解はどのようになる可能性があるか、理由とともに説明しなさい。

応用問題 4：パラメータを含む連立一次方程式の解の分類

実数パラメータ k を含む以下の連立一次方程式について、パラメータ k の値によって解の種類（唯一解、無数の解、解なし）がどのように変化するかを調べなさい。それぞれの場合について、k の条件を具体的に示しなさい。

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

応用問題 5：解の幾何学的意味と線形従属性

3 次元空間において、次の 4 つの平面を考えます。

$$\begin{aligned} P_1 &: x - y + z = 2 \\ P_2 &: 2x + y - z = 1 \\ P_3 &: x + 2y - 2z = -1 \\ P_4 &: ax + by + cz = d \end{aligned}$$

(a) 平面 P_1, P_2, P_3 の 3 つの平面が共通の交点を持つかどうかを調べなさい。持つ場合はその交点の座標を求めなさい。

(b) (a) で共通の交点が存在する場合、その交点を平面 P_4 も通るようにパラメータ a, b, c, d の間に成り立つべき関係式を一つ導きなさい。

(c) もし、平面 P_1, P_2, P_3 が 1 本の直線を共有して交わる場合（つまり無数の解を持つ場合）、その交線を P_4 が含む（つまり P_4 がその交線上の全ての点を通る）ための条件は、係数ベクトル (a, b, c) と定数 d が、他の 3 つの平面の係数ベクトルと定数項の線形結合としてどのように表現できるか考察しなさい。(ヒント：拡大係数行列の行ベクトル間の線形従属性と関連付けて考えてみましょう。)