線形代数学 I: 第6回講義

データサイエンスに必要な行列

中村 知繁

2025/02/08

1. 講義情報と予習ガイド

- **講義回**: 第6回
- **関連項目**: 行列の特殊形、行列の性質
- **予習すべき内容**:
  - 行列の定義（第4回）
  - 行列の和とスカラー倍（第4回）
  - 行列の積（第5回）

2. 学習目標

1. **単位行列**の定義と性質を理解し、応用できる
2. **転置行列**の定義と性質を理解し、応用できる
3. **対称行列**の定義と性質を理解し、応用できる
4. 行列の特殊形が**データサイエンス**でどのように活用されるかを理解する

3. 基本概念

今回学ぶ行列の特殊な形：

1. **単位行列 (Identity Matrix)**
2. **転置行列 (Transpose Matrix)**
3. **対称行列 (Symmetric Matrix)**

3.1 単位行列（Identity Matrix） - 定義と例

> **定義**: n次の単位行列 I_n は、主対角線上の要素がすべて1で、それ以外の要素がすべて0である正方行列である。
>
> $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

例:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 単位行列（Identity Matrix） - 性質と数値例

性質:

1. 任意の行列 A に対して: $AI = IA = A$
2. 対称行列である: $I^T = I$
3. 逆行列は自身である: $I^{-1} = I$
4. ランクは n である（I が $n \times n$ 行列の場合）

数値例: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

同様に $I_2 A = A$

3.2 転置行列（Transpose Matrix） - 定義と例

> **定義**: 行列 A の転置行列 A^T は、A の行と列を入れ替えた行列である。
> ($m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ なら、$A^T = (a_{ji})$ は $n \times m$ 行列)

例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3.2 転置行列（Transpose Matrix） - 性質

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = cA^T$ （c はスカラー）
4. $(AB)^T = B^T A^T$ **（積の順序が逆転！）**
5. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$

3.2 転置行列（Transpose Matrix） - 数値例 (性質2)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ のとき、$(A+B)^T = A^T + B^T$ を確認。

- $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \implies (A+B)^T = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$
- $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
- $A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+7 \\ 2+6 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

両者は一致する。

3.3 対称行列（Symmetric Matrix） - 定義と例

> **定義**: 正方行列 A が対称行列であるとは、$A = A^T$ が成り立つことである。（つまり $a_{ij} = a_{ji}$）

例: 主対角線について要素が対称になっている。

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \color{red}{2} & \color{blue}{3} \\ \color{red}{2} & \mathbf{4} & \color{green}{5} \\ \color{blue}{3} & \color{green}{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$A^T = A$ を満たす。

3.3 対称行列（Symmetric Matrix） - 性質

1. 対角要素 a_{ii} は任意（実数行列なら実数）。
2. 固有値はすべて実数（後述）。
3. 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交（後述）。
4. **任意の行列 A に対して、$A^T A$ と AA^T は常に対称行列。**
5. 対称行列同士の和も対称行列。

3.3 対称行列（Symmetric Matrix） - 数値例 (性質4)

任意の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ から $A^T A$ を作る。

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 3(3) & 1(2) + 3(4) \\ 2(1) + 4(3) & 2(2) + 4(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

この結果は $a_{12} = a_{21} = 14$ であり、対称行列になっている。

4. 演習問題

ここから演習問題です。

演習問題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ とする。AB を計算せよ。

演習問題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。BA を計算せよ。

演習問題 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ とする。AB と BA を計算せよ。

演習問題 4

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ とする。AB を計算せよ。

演習問題 5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。AC と CA はそれぞれ定義されるか。定義される場合は計算し、定義されない場合はその理由を述べよ。

演習問題 6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。A^2 と A^3 を計算せよ。($A^2 = AA, A^3 = AAA$)

演習問題 7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。E_2A と AE_3 を計算し、結果が A と一致することを確認せよ。

演習問題 8

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2×2 の単位行列 E について、$AE = EA = A$ となることを計算により確認せよ。

演習問題 9

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の転置行列 A^T を求めよ。

演習問題 10

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$(A+B)^T$ と $A^T + B^T$ をそれぞれ計算し、両者が等しいことを確認せよ。

演習問題 11

問10の行列 A, B について、$(AB)^T$ と $B^T A^T$ をそれぞれ計算し、両者が等しいことを確認せよ。

演習問題 12

次の行列の中から、(i) 対称行列、(ii) 反対称行列（交代行列）をすべて選べ。

(a) $$ \begin{pmatrix} 1 & 2 \ 2 & 3 \end{pmatrix} $$
(b) $$ \begin{pmatrix} 0 & 1 \ -1 & 0 \end{pmatrix} $$
(c) $$ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$
(d) $$ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$
(e) $$ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \ 2 & 0 & -1 \ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$
(f) $$ \begin{pmatrix} 1 & 2 \ 3 & 4 \end{pmatrix} $$

演習問題 13

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ とする。$A^T A$ を計算し、この結果が対称行列になることを確認せよ。

演習問題 14

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする。$S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ と $K = \frac{1}{2}(A - A^T)$ をそれぞれ計算せよ。そして、S が対称行列、K が反対称行列であり、かつ $A = S + K$ が成り立つことを確認せよ。

演習問題 15

A, B を $n \times n$ 行列とする。$X = A^T BA$ とおく。

(a) X^T を A, B, A^T, B^T を用いて表せ。
(b) B が対称行列である場合、$X = A^T BA$ も対称行列になることを示せ。

演習問題 16

対称・反対称部分への分解と積
任意の $n \times n$ 正方行列 A に対して、$S = \frac{1}{2}(A + A^T)$（対称部分）、$K = \frac{1}{2}(A - A^T)$（反対称部分）とおく。

(a) $A = S + K$ および $A^T = S - K$ であることを確認せよ。
(b) AA^T を S と K を用いて表せ。（ヒント: $AA^T = (S + K)(S - K)$ を展開する）

演習問題 17

対称行列の決定と性質

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 2 & 3 & z \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ が対称行列であるように、x, y, z の値を定めよ。

演習問題 18

転置と双線形形式

A を $n \times n$ 行列、x, y を $n \times 1$ の列ベクトルとする。$s = x^T A y$ はスカラー（1×1 行列）である。

(a) s^T を x, y, A の転置を用いて表せ。（スカラーの転置は元のスカラーと同じ）
(b) A が対称行列のとき、$x^T A y = y^T A x$ が成り立つことを示せ。

演習問題 19

条件を満たす対称行列

次の3つの条件をすべて満たす 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をbを用いて表せ。

(i) A は対称行列である。($c = b$)
(ii) A の対角成分の和（トレース）は 5 である ($a + d = 5$)。
(iii) A の行列式は 4 である ($ad - bc = 4$)。