線形代数学 I: 第14回講義

逆行列の概念、存在条件、そして応用

中村 知繁

T. Nakamura | Juntendo Univ.

2025/02/08

講義情報と予習ガイド

- **講義回**: 第14回
- **テーマ**: 逆行列の概念、存在条件、計算方法、およびその応用
- **関連項目**: 連立一次方程式、ガウスの消去法、行列のランク、行列式
- **予習事項**:
  - 第10回〜第13回の内容を十分に復習
    - 特に行列のランク
    - 行列式
    - 連立一次方程式の解の存在条件

学習目標

本講義の終了時には、以下の事項について理解し、説明・計算できるようになることを目指します。

1. **逆行列の定義**と基本的な**性質**を理解し、説明できる。
2. 逆行列の**存在条件**を、行列の**ランク**および**行列式**と関連付けて説明できる。
3. **ガウスの消去法**を用いて逆行列を具体的に計算できる。
4. 逆行列と**連立一次方程式の解法**との関連を理解し、応用できる。
5. 回帰分析など、**データサイエンス**の文脈における逆行列の重要性と具体的な利用例を理解する。

1. 基本概念

1.1 逆行列の定義

> **定義**: A を $n \times n$ の正方行列とするとき、$AB = BA = I_n$ となる $n \times n$ 行列 B が存在する場合、B を A の**逆行列 (inverse matrix)** といい、A^{-1} と表します。ここで I_n は n 次の**単位行列 (identity matrix)** です。

- 関係式: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- **アナロジー**:
  - 実数の「1」 $\Leftrightarrow$ 単位行列 I_n
  - 実数の逆数 a^{-1} $\Leftrightarrow$ 逆行列 A^{-1}

1.2 逆行列の基本的性質

1. **正方行列**: 逆行列が定義されるのは正方行列のみ。
2. **一意性**: 逆行列が存在する場合、ただ一つに定まる。
3. **正則性**:
   - 逆行列を持つ行列: **正則行列 (invertible / non-singular)** または **可逆行列**
   - 逆行列を持たない行列: **特異行列 (singular)**
4. **行列式との関係**: $\det(A) \neq 0 \iff A^{-1}$ が存在する。（後述）
5. **逆行列の逆行列**: $(A^{-1})^{-1} = A$
6. **転置行列の逆行列**: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
7. **積の逆行列**: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (順序が逆転！)

2. 逆行列の存在条件と計算方法

2.1 逆行列の存在条件

2.1.1 行列のランクとの関係

> **定理**: $n \times n$ の正方行列 A の逆行列が存在するための必要十分条件は、$\mathrm{rank}(A) = n$ である。

- $\mathrm{rank}(A) = n$ とは？
  - 行列 A の列（または行）ベクトルが線形独立。
  - 行列 A による変換が「情報を縮退させていない」（次元を保つ）。

2.1.2 行列式との関係

> **定理**: $n \times n$ の正方行列 A の逆行列が存在するための必要十分条件は、$\det(A) \neq 0$ である。

- この条件は $\mathrm{rank}(A) = n$ と同値。
- 実用上、行列式を計算してゼロかどうかを確認することが多い。

2.2 ガウスの消去法による逆行列の計算

手順:

1. 拡大行列 $[A|I_n]$ を作成。
   (A: $n \times n$ 行列, I_n: n 次単位行列)
2. 行基本変形により、A の部分を I_n に変形する。
3. 変形が成功すれば、右側の部分は A^{-1} になる: $[I_n|A^{-1}]$

例題1: 2×2 行列の逆行列

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

拡大行列: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

1. $R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$:
   $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$
2. $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$:
   $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$

例題1: 2×2 行列の逆行列 (続き)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

3. $R_2 \leftarrow 2R_2$:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$
4. $R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2$:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

ゆえに、$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

検算: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

例題2: 3×3 行列の逆行列

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

拡大行列: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

1. $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:
   $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
2. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:
   $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

例題2: 3×3 行列の逆行列 (続き1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$
4. $R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

例題2: 3×3 行列の逆行列 (続き2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

5. $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$
6. $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 8/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

例題2: 3×3 行列の逆行列 (続き3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 8/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

7. $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

ゆえに、$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/3 & -4/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -5/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

3. 逆行列の応用

3.1 連立一次方程式の解法

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
もし A が正則（A^{-1} が存在する）ならば、

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$(A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$I_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

解 $\mathbf{x}$ が一意に求まる。

注意点:
数値計算では、逆行列 A^{-1} を陽に計算するより、ガウスの消去法等で直接 $\mathbf{x}$ を求める方が効率的・安定的なことが多い。

3.2 データサイエンスにおける応用例 📊📈⚙️

1. **線形回帰分析 (Linear Regression)**
   - 正規方程式: $(X^T X)\boldsymbol{\beta} = X^T \mathbf{y}$
   - 回帰係数: $\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$
2. **共分散行列と精度行列 (Covariance & Precision Matrices)**
   - 共分散行列 Σ
   - 精度行列 Σ^{-1}: 変数間の条件付き独立性を反映。ガウスグラフィカルモデル等。
3. **主成分分析 (PCA) の理論的背景**
   - 共分散行列の解析に、正則性や対角化などの関連概念が重要。
4. **フィルタリングと制御理論 (Filtering & Control Theory)**
   - カルマンフィルタ等で誤差共分散行列の更新に逆行列計算が登場。

4. 演習問題

基本問題 1

問題1: 以下の行列の逆行列を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題2: 以下の行列 B について、逆行列が存在するか判定し、存在する場合は逆行列を求めなさい。存在しない場合は、その理由（ランクまたは行列式の観点から）を述べなさい。

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

基本問題 2

問題3: 以下の連立一次方程式を、逆行列を用いて解きなさい。

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

問題4: 以下の行列の逆行列を求めなさい。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

応用問題 1

問題5: A と B を同サイズの正方行列とし、AB が正則行列であるとします。このとき、A と B は共に正則行列であることを証明しなさい。
（ヒント: 行列式やランクの性質を用いる）

問題6: 2 次正方行列 A に対して、$A^2 = O$ （O は零行列）が成り立つとします。このとき、$I - A$ の逆行列を、I と A を用いて表しなさい。
（ヒント: $(I - A)(I + A) = I - A^2$ のような展開を考える）

応用問題 2 (健康データサイエンス関連)

問題7: 健康状態の遷移確率行列 P が次のように与えられています（$i, j = 1, 2, 3$ は「良好」「普通」「不良」）。

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(a) この遷移行列 P の逆行列 P^{-1} を計算しなさい。

(b) P^{-1} の各要素 $(P^{-1})_{ij}$ が持つ可能性のある解釈について、健康データの文脈で考察しなさい。特に、逆行列の要素が負の値を取る場合、それは確率としてどのように解釈できるか、あるいは解釈が困難であるか、理由とともに述べなさい。
（ヒント: P は現在→将来。P^{-1} は？ 確率の公理（非負性、総和1）との関連は？）

(c) 1年後の健康状態分布が $[0.4, 0.35, 0.25]$ であったとき、元の健康状態分布を P^{-1} を用いて推定しなさい。

まとめ

- 逆行列の定義と性質
- 逆行列の存在条件 (ランク、行列式)
- ガウスの消去法による逆行列の計算
- 逆行列の応用 (連立一次方程式、データサイエンス)

次回予告: (必要に応じて記載)