線形代数学 I:
第15回講義
行列式の概念と計算

中村 知繁

T. Nakamura | Juntendo Univ.

2025/02/08

1. 本日の学習目標

本講義では、正方行列の最も重要な特性の一つである「行列式」について学びます。以下の4点を達成することを目標とします。

1. **行列式の定義の理解**
   行列式が何であり、どのような幾何学的意味を持つかを説明できる。
2. **計算能力の習得**
   2次および3次の正方行列の行列式を正確に計算できる。
3. **基本性質の理解**
   行列式を特徴づける3つの公理（多重線形性、交代性、正規性）を理解し、それらから導かれる諸性質を説明できる。
4. **応用への接続**
   行列式を用いて、行列の可逆性（逆行列が存在するか否か）を判定できる。

2. 行列式とは何か？

2.1 行列式への導入

行列式 (determinant) は、n次正方行列Aに対してただ一つ定まるスカラー（数）であり、$\det(A)$または$|A|$と表記されます。

行列式は、主に以下の2つの側面から理解されます。

- **幾何学的意味**: 線形変換による**体積変化率**
  - 行列式の絶対値は、列ベクトルが張る図形の**体積**（2次なら面積、3次なら体積）の拡大率を表す。
  - 行列式の符号は、図形の**向き**が維持されるか（正）、反転されるか（負）を示す。
- **代数的意味**: **行列の可逆性**の判定
  - $\det(A) \neq 0 \iff$ 行列Aは可逆（逆行列 A^{-1} を持つ）。
  - 連立1次方程式の解の存在と密接に関連する。

2.2 2次行列の行列式

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式は、以下で定義されます。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これは「主対角成分の積」から「副対角成分の積」を引いたものです。

例題 2.1
行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい。

解
定義に従い、

$$\det(A) = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 8 - (-3) = 11$$

幾何学的解釈
ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形の面積は **11** となります。

2.3 3次行列の行列式：サラスの方法

3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式は、**サラス（Sarrus）の方法**で計算できます。

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

【注意】
サラスの方法は **3次行列にのみ適用可能** な便法です。4次以上の行列式には用いることができません。

例題 2.2

行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい。

解

サラスの方法を用いて、

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= (2 \cdot 0 \cdot 5) + (1 \cdot 4 \cdot 2) + (3 \cdot (-1) \cdot (-1)) \\
&\qquad - \{(3 \cdot 0 \cdot 2) + (2 \cdot 4 \cdot (-1)) + (1 \cdot (-1) \cdot 5)\} \\
&= (0 + 8 + 3) - (0 - 8 - 5) \\
&= 11 - (-13) = 24
\end{aligned}
$$

3. 行列式を特徴づける3つの公理

n次行列式の本質は、以下の3つの公理によって完全に特徴づけられます。
（行列を列ベクトルの集まり $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ として記述）

1. **多重線形性 (Multilinearity)**: 各列について線形。
2. **交代性 (Alternating Property)**: 隣り合う列を入れ替えると符号が反転。
3. **正規性 (Normalization)**: 単位行列の行列式は 1。

これらの公理から、行列式のすべての性質が導かれます。

公理1：多重線形性 (Multilinearity)

行列式は、**各列について**線形性を持ちます。

1. **スカラー倍**: $\det(\dots, c\vec{a}_j, \dots) = c \cdot \det(\dots, \vec{a}_j, \dots)$
2. **和**: $\det(\dots, \vec{a}_j + \vec{b}_j, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_j, \dots) + \det(\dots, \vec{b}_j, \dots)$

【具体例】 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ($\det(B) = 24$) の第2列を2倍すると...

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & 3 \\ -1 & \mathbf{0} & 4 \\ 2 & -\mathbf{2} & 5 \end{pmatrix}$$

公理より $\det(B') = 2 \cdot \det(B) = 2 \cdot 24 = 48$ となるはずです。
実際に計算すると、
$\det(B') = (0 + 16 + 6) - (0 - 16 - 10) = 22 - (-26) = 48$。
確かに成立しています。

公理2：交代性 (Alternating Property)

隣り合う2つの列を入れ替えると、行列式の符号が反転します。

$$\det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots) = -\det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots)$$

【具体例】 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ($\det(B) = 24$) の第1列と第2列を入れ替えると...

$$B'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 4 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 5 \end{pmatrix}$$

公理より $\det(B'') = -\det(B) = -24$ となるはずです。
実際に計算すると、
$\det(B'') = (-5 - 8 + 0) - (3 + 8 + 0) = -13 - 11 = -24$。
確かに符号が反転しています。

公理2からの帰結

> **2つの列が等しい行列の行列式は 0 になる。**

理由:
同じ列を入れ替えても行列は変わりませんが（$\det(A)$）、交代性の公理によれば符号が反転するはずです（$-\det(A)$）。
したがって、$\det(A) = -\det(A)$ となり、これを満たすのは $\det(A) = 0$ のみです。

【具体例】 第1列と第2列が等しい行列 C

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & 3 \\ -1 & \mathbf{-1} & 4 \\ 2 & \mathbf{2} & 5 \end{pmatrix}$$

公理より $\det(C) = 0$ となるはずです。
実際に計算すると、
$\det(C) = (-10 + 16 - 6) - (-6 + 16 - 10) = 0 - 0 = 0$。

公理3：正規性 (Normalization)

単位行列 I の行列式は 1 です。

$$\det(I) = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$$

($\vec{e}_i$ は標準単位ベクトル)

これは、行列式が測る「体積」の基準が、単位立方体の体積（1）であることを意味します。

【具体例】 3次単位行列 I_3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

サラスの方法で計算すると、
$\det(I_3) = (1 \cdot 1 \cdot 1) - 0 = 1$。

4. 行列式の重要な性質

上記の3公理から、以下の重要な性質がすべて導出されます。

1. **行基本変形との関係**
2. **転置行列の行列式**: $\det(A^T) = \det(A)$
3. **積の行列式**: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
4. **逆行列の存在条件**: A^{-1} が存在 $\iff \det(A) \neq 0$

性質1：行基本変形との関係

1. ある行（列）に別の行（列）の定数倍を加えても、**行列式の値は変わらない。**
2. 2つの行（列）を入れ替えると、**行列式の符号が反転する。**（公理2の再掲）
3. ある行（列）を c 倍すると、**行列式は c 倍になる。**（公理1の帰結）

【性質1-1の証明】 なぜ値が変わらないのか？
行列 $A = (\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots)$ の第 j 列に、第 i 列の c 倍を加えた行列 A' を考えます。
$A' = (\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j + c\vec{a}_i, \dots)$

公理1（多重線形性）より、
$\det(A') = \det(\dots, \vec{a}_j, \dots) + \det(\dots, c\vec{a}_i, \dots)$
$= \det(A) + c \cdot \det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_i, \dots)$

右辺第2項の行列は、第 i 列と第 j 列が同じベクトル $\vec{a}_i$ です。公理2の帰結より、この行列式は 0 です。よって、

$$\det(A') = \det(A) + c \cdot 0 = \det(A)$$

行列式の値は変わらないことが示されました。

【性質1-1の具体例】

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ($\det(B) = 24$) の第3列に第1列の(-2)倍を加えます。

$$B''' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 + (-2) \cdot 2 \\ -1 & 0 & 4 + (-2) \cdot (-1) \\ 2 & -1 & 5 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

性質より $\det(B''') = \det(B) = 24$ となるはずです。
実際に計算すると、
$\det(B''') = (0 + 12 - 1) - (0 - 12 - 1) = 11 - (-13) = 24$。
値が変わらないことが確認できました。この性質は計算において非常に重要です。

性質2：転置行列の行列式

行列 A とその転置行列 A^T の行列式は等しい。

$$\det(A^T) = \det(A)$$

これにより、これまで**列**について述べてきた全ての性質は、**行**についても同様に成り立ちます。

【具体例】 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ($\det(B) = 24$) の転置行列

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(B^T) = (0+3+8) - (0-8-5) = 11 - (-13) = 24$。
確かに $\det(B^T) = \det(B)$ です。

性質3：積の行列式

n次正方行列 A, B に対して、積 AB の行列式は、それぞれの行列式の積に等しい。

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

【注意】 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ は**一般に成り立ちません。**

例題 4.1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を確認しなさい。

解

$\det(A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$

$\det(B) = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$

よって、$\det(A)\det(B) = 1 \cdot 2 = 2$。

一方、行列の積は

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$

その行列式は

$\det(AB) = 7 \cdot 16 - 10 \cdot 11 = 112 - 110 = 2$。

したがって、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成立します。

性質4：逆行列の存在条件

n次正方行列 A について、以下は同値です。

“ A **が逆行列** A^{-1} **を持つ** $\iff \det(A) \neq 0$ ”

証明の概略:
(⇒) A^{-1} が存在すると仮定すると、$AA^{-1} = I$ が成り立ちます。
両辺の行列式を取ると、性質3より $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I)$。
公理3より $\det(I) = 1$ なので、$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ となります。
この式が成り立つためには、$\det(A) \neq 0$ でなければなりません。

また、このとき $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ であることもわかります。

例題 4.2

行列 $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ は逆行列を持つか判定しなさい。

解

$\det(F) = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0$

行列式が 0 であるため、行列 F は逆行列を持ちません。

【応用例】

- 行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
  $\det(B) = 24 \neq 0$ なので、**行列 B は逆行列を持ちます。**
  また、その逆行列の行列式は $\det(B^{-1}) = 1/24$ です。
- 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
  $\det(C) = 0$ なので、**行列 C は逆行列を持ちません。**
  （第1列と第2列が線形従属であることからもわかります。）

本日のまとめ

1. **行列式の定義**: 幾何学的には「体積拡大率＋向き」、代数的には「可逆性の指標」。
2. **計算方法**: 2次、3次（サラスの方法）の行列式を計算できるようになった。
3. **3つの公理**: **多重線形性**、**交代性**、**正規性**が行列式の本質。
4. **重要な性質**:
   - 行基本変形で行列式の値がどう変わるかを理解した。
   - $\det(A^T) = \det(A)$
   - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
   - $\det(A) \neq 0 \iff A$ **は可逆**

次回は、この性質を利用して、より高次の行列式を効率的に計算する「余因子展開」を学びます。