

線形代数学 I/基礎 練習問題 18

講義担当者: 中村 知繁

問題 1

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を、行列の対角化を利用して求めなさい。ただし、 $a_0 = 2$ 、 $a_1 = 5$ である。

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

(ヒント) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、 $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して、 $v_{n+1} = Av_n$ が成り立つことを利用する。

問題 2

次の式により定まる数列 x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) について、次の問いに答えなさい。

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = 0$$

ただし、 $x_0 = 3$ 、 $x_1 = 2$ 、 $x_2 = 6$ とする。

(1) ベクトル $y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ とするとき、 $y_{n+1} = Ay_n$ を満たす行列 A を求めなさい。

(2) A の固有ベクトルを v_1, v_2, v_3 とするとき、初期ベクトル $y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を、 v_1, v_2, v_3 を用いて表しなさい。

(3) x_{10} を求めなさい。

問題 3

$0 < p, q < 1$ なる実数 p, q に対して、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

により定める。

(1) A の固有値と、その固有ベクトルを求めなさい。

(2) A^n を求めなさい。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めなさい。