線形代数学 I

第16回：余因子展開による行列式の計算

T. Nakamura | Juntendo Univ.
2025/02/08

今回のテーマ

行列式の計算、だんだん大変になってきましたね？
3×3 は何とかなるけど、4×4 や 5×5 は…？ 🤔

ご安心ください！
今回は、行列式の計算を劇的に効率化する強力なツール
✨ **「余因子展開」** ✨
をマスターします。

1. 準備：小行列と余因子

まず、2つの言葉を覚えましょう。

- **小行列 (Minor)** M_{ij}
  行列 A から**第** i **行**と**第** j **列**を取り除いた、一回り小さい行列。
- **余因子 (Cofactor)** A_{ij}
  小行列の行列式に、**符号**を付けたもの。

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

余因子の符号 $(+/-)$

符号 $(-1)^{i+j}$ は、場所 (i,j) によって次のような**市松模様**になります。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

左上 $(1,1)$ がプラスで、隣り合うごとに符号が反転します。

例：余因子を計算してみよう

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- $d_{11} = 2$ の余因子 D_{11}
  $M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
  $D_{11} = (-1)^{1+1} \det(M_{11}) = +(6 - 10) = -4$
- $d_{32} = 2$ の余因子 D_{32}
  $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
  $D_{32} = (-1)^{3+2} \det(M_{32}) = -(10 - 4) = -6$

2. 本題：余因子展開の公式

行列式は、**好きな行か列を1つだけ選んで**、次の計算で求められます。

> **第 i 行による展開:**
> $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$
>
> **第 j 列による展開:**
> $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

Point! どの行/列で計算してもOK。
ならば、**0 (ゼロ) が一番多い行/列**を選ぶのが賢い選択です！

例：余因子展開で計算してみよう

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \color{blue}{1} & 2 \\ 0 & \color{blue}{2} & -1 \\ 4 & \color{blue}{0} & 3 \end{pmatrix}$$

第2列に0があるので、**第2列で展開**します。
$\det(B) = 1 \cdot B_{12} + 2 \cdot B_{22} + 0 \cdot B_{32}$

- $B_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (-1)(4) = -4$
- $B_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (+1)(1) = 1$

$\det(B) = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (1) + 0 = -2$

3. 最強パターン：還元定理

余因子展開が一番カンタンになる、夢のようなケースです。

> **還元定理**
>
> ある行（または列）に、**要素が1つ以外ぜんぶ0**のとき、行列式は
>
> $$\det(A) = a_{ij}A_{ij}$$
>
> （その非ゼロ要素 × その余因子）だけで計算できます。

例：還元定理を使ってみよう

$$A = \begin{pmatrix} \color{blue}{4} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

第1行に0が2つ！ 還元定理の出番です。

$$\det(A) = 4 \cdot A_{11}$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot (18 - 10) = 4 \cdot 8 = 32$$

一瞬で計算できました！ 🎉

4. 応用：行基本変形との合わせ技

「都合よく0がたくさんある行列ばかりじゃない...」

ならば、自分で0を作りましょう！

使うのは**行基本変形**です。

行基本変形と行列式の関係

1. ある行を c 倍する → 行列式も c 倍
2. 2つの行を入れ替える → 行列式は -1 倍
3. **ある行の定数倍を他の行に加える → 行列式の値は変わらない！**

特に **3.** が超重要！
これを使えば、行列式の値を変えずに、行列をどんどんシンプルに（0が多い形に）できます。

例：変形して、展開する

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

このままでは0がありません。第1行を使って0を作ります。
($R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1$)

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ 行列式の値は変わらない

第1列に0が2つできたので、ここで**還元定理**！

$$\det(C) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$$

まとめ：行列式計算の最強戦略

1. **観察** 👀: 0が多い行/列を探す。

2. **展開** 🚀: 見つけたら、その行/列で**余因子展開**！
   (特に非ゼロが1つなら**還元定理**で瞬殺)

3. **変形** 🛠️: 0がなければ、**行基本変形**で0を作る。
   （ある行の定数倍を他の行に足すのが基本）

4. **繰り返し** 🔄: 小さくなった行列式も、同じ戦略で計算する。

補足：余因子と逆行列

実は、今日学んだ「余因子」は、逆行列を求める公式にも登場します。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

$\mathrm{adj}(A)$ は**随伴行列**といい、余因子を集めて作った行列から作られます。

この話は、また別の機会に詳しく解説します。お楽しみに！