

線形代数学 I

固有値と固有ベクトル

1. はじめに：なぜ固有値を学ぶのか？

線形変換はベクトルを別のベクトルに写像します。

多くの複雑な変換の中にも、その変換の本質を捉える**「特別な方向」**が存在します。

行列 A による変換を考えても、**方向が変わらず、大きさだけが変化するベクトル**がそれにあたります。

- この特別な方向を示すベクトルが**固有ベクトル (eigenvector)**
- その大きさの変化率が**固有値 (eigenvalue)**

なぜ固有値が重要なのか？

固有値と固有ベクトルを理解することは、複雑な線形変換を、その「軸」に沿った**単純な伸縮操作**として分解して捉えることを可能にします。

この強力な概念は、理工学の幅広い分野で不可欠なツールとなっています。

- **統計学**: 主成分分析 (PCA) によるデータ次元削減
- **量子力学**: 系のエネルギー状態の記述
- **情報工学**: Googleのページランクアルゴリズム

本講義では、まずこの基本概念を正確に理解し、計算手法をマスターすることを目指します。

2. 固有値・固有ベクトルの定義

“ 定義：固有値と固有ベクトル

$n \times n$ の正方行列 A と、ゼロベクトルでないベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ 、およびスカラー $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$$

が成り立つとき、スカラー λ を行列 A の**固有値**、ベクトル \mathbf{v} をその固有値 λ に属する**固有ベクトル**と呼びます。 ”

• **注1:** なぜ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$?

もし $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を許すと、 $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ は任意の λ で成立し、概念が無意味になるため。

• **注2:** 一般性を考慮し複素数 \mathbb{C} で定義しますが、応用上は実数 \mathbb{R} で扱うことも多いです。

2.2 幾何学的解釈

固有値・固有ベクトルの関係式 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ は、線形変換の幾何学的な性質を端的に表しています。

- **固有ベクトル \mathbf{v}** : 行列 A によって線形変換されても、その**方向が変わらない**特別なベクトル。
- **固有値 λ** : 固有ベクトル \mathbf{v} が、変換によってその方向にどれだけ**伸縮されるか**を示す倍率。

幾何学的解釈： λ の値による変化

- $\lambda > 1$ ならば、同じ向きに**伸びる**。
- $0 < \lambda < 1$ ならば、同じ向きに**縮む**。
- $\lambda < 0$ ならば、**逆向き**に伸縮する。
- $\lambda = 1$ ならば、大きさも方向も変わらない (**不動点**)。
- $\lambda = 0$ ならば、ベクトルは原点 **0** に写像される。

3. 固有値・固有ベクトルの計算

3.1 特性方程式の導出

固有値と固有ベクトルを求めるための鍵は、定義式を変形することから始まります。

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{v} - \lambda I\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (I \text{は単位行列})$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

この式は、 \mathbf{v} に関する斉次連立一次方程式です。

私たちは、**非自明解** ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) を探しています。

特性方程式の導出（続き）

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

斉次連立一次方程式が非自明解を持つための必要十分条件は、係数行列が**正則でない（逆行列を持たない）**ことです。

行列が正則でないことと、その行列式がゼロであることは同値です。
したがって、以下の式が成立しなければなりません。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- この方程式を A の**特性方程式（Characteristic Equation）**と呼びます。
- 左辺 $\det(A - \lambda I)$ は λ の n 次多項式となり、**固有多項式**と呼びます。

3.2 計算の手順

1. 固有値を求める

1. 固有多項式 $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ を計算する。
2. 特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を解き、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を得る。

2. 固有ベクトルを求める

1. 得られた各固有値 λ_i に対して、斉次連立一次方程式 $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を立てる。
2. この方程式を解き、非自明解 \mathbf{v} を求める。

【重要】 : 固有ベクトルは一意に定まりません。ある \mathbf{v} が固有ベクトルならば、その任意のスカラー倍 $c\mathbf{v}$ ($c \neq 0$) も同じ固有値に属する固有ベクトルです。重要なのはその方向です。

3.3 計算例 (2 × 2 行列)

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めます。

Step 1: 固有値を求める

特性方程式を立てます。

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) - (-2)(1) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

よって、固有値は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ です。

計算例 (2 × 2 行列) - Step 2

固有ベクトルを求める

(i) $\lambda_1 = 2$ の場合

$(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を解きます。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$$

固有ベクトルは $\mathbf{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($c \neq 0$)。代表として $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

(ii) $\lambda_2 = 3$ の場合

$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を解きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 - 2v_2 = 0 \implies v_1 = 2v_2$$

固有ベクトルは $\mathbf{v}_2 = d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($d \neq 0$)。代表として $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

3.4 計算例 (3 × 3 行列)

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ で考えます。

Step 1: 固有値を求める

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

第2列で余因子展開すると、

$$(2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)[(-\lambda)(3 - \lambda) - (-2)(1)] = 0$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

よって、固有値は $\lambda_1 = 1$ (重複度1)、 $\lambda_2 = 2$ (重複度2) です。

計算例 (3 × 3 行列) - Step 2 (i)

(i) $\lambda_1 = 1$ の場合

$(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を解きます。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形を行うと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v_1 = -2v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

$v_3 = c$ とおくと、固有ベクトルは $\mathbf{v}_1 = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

固有空間 E_1 は $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ で、幾何的重複度は1です。

計算例 (3 × 3 行列) - Step 2 (ii)

(ii) $\lambda_2 = 2$ の場合

$(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を解きます。

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形を行うと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 + v_3 = 0$$

計算例 (3 × 3 行列) - Step 2 (ii)

(ii) $\lambda_2 = 2$ の場合

v_2 は任意、 $v_3 = c_1$ とおくと $v_1 = -c_1$ 。 $v_2 = c_2$ とおくと、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

固有空間 $E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ で、幾何的重複度は2です。